ÜBER ZERLEGUNGEN VON RECHTECKEN IN INKONGRUENTE QUADRATE

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

ALFRED STÖHR
AUS BERLIN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 23. NOVEMBER 1938
TAG DER PROMOTION: 25. JANUAR 1939

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. W. WEBER
PROFESSOR DR. E. SCHMIDT

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin" / Band 4

DEM ANDENKEN
MEINER MUTTER

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548011_0015

I.

Ein Rechteck sei lückenlos und schlicht in endlich viele Quadrate zerlegt. Die Zerlegung soll eine zulässige heißen, wenn die Teilquadrate paarweise inkongruent sind und ihre Anzahl > 1 ist. Das Hauptziel dieser Arbeit ist, einige Aussagen über zulässig zerlegbare Rechtecke zu machen.

Zerlegungen von Rechtecken in endlich viele Teilrechtecke hat Herr DEHN[1]) betrachtet. Von seinen Ergebnissen interessieren hier insbesondere:

Läßt sich aus einer Anzahl von Rechtecken ein Rechteck zusammensetzen und stehen die Seiten jedes einzelnen der Teilrechtecke in rationalem Verhältnis zueinander, so stehen die Seiten sämtlicher Teilrechtecke untereinander und mit den Seiten des zusammengesetzten Rechtecks in rationalem Verhältnis.

Ein Quadrat läßt sich nur in Quadrate mit kommensurablen Seiten zerlegen.

Ein Rechteck mit nicht kommensurablen Seiten läßt sich nicht in Quadrate zerlegen.

Rechtecke, die aus resp. ähnlichen Rechtecken homolog zusammengesetzt sind, sind ähnlich.

Eine Fortführung der Untersuchungen von Herrn DEHN stellt eine von Herrn TOEPKEN[2]) gestellte Aufgabe dar.

Beispiele zulässig zerlegter Rechtecke finden sich in der Literatur.[3])

---

1) M. Dehn, *Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*. Math. Ann. 57 (1903), S. 314—332. — Vgl. auch Schoenflies-Dehn, *Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes*. 2. Aufl. Berlin 1931, S. 402—411.

2) H. Toepken, *Aufgabe 242*. Jahresber. d. D. M. V. 47 (1937), S. 2 kursiv.

3) M. Abe, *On the problem to cover simply and without gap the inside of a square with a finite number of squares which are all different from one another*. Proceed. Phys.-Math. Soc. Japan (3) 14 (1932), S. 385—387. Herr Abe zitiert dort eine auf den gleichen Gegenstand bezügliche, in japanischer Sprache geschriebene Arbeit von sich, die mir leider nicht zugänglich war. — Jaremkewycz, *Aufgabe 1242*. Zeitschr. f. d. math. u. naturwiss. Unterricht 66 (1935), S. 251. — Jaremkewycz, Mahrenholz, Sprague, *Lösungen der Aufgabe 1242*. Ebenda 68 (1937), S. 43. Dort ist auch eine sehr unbestimmte Angabe über eine Behandlung des Themas in einer polnischen Zeitschrift zu finden, die ich leider nicht ermitteln konnte. — Herr R. Sprague teilte mir freundlicherweise eine größere Anzahl weiterer zulässig zerlegter Rechtecke mit.

Es ist nicht schwer, solche Rechtecke anzugeben. Ein Verfahren zu ihrer Herstellung ist folgendes: Man gehe von einer Zerlegung eines Rechtecks in Teilrechtecke aus. Die Seitenlängen der Teilrechtecke setze man als Unbestimmte an. Man stelle nun für den Fall, daß die Teilrechtecke Quadrate sein sollen, die Schließungsbedingungen der Figur auf. Das gibt für die Seitenlängen der Teilquadrate ein lineares homogenes Gleichungensystem. Wenn man Glück hat, hat dieses System eine Lösung, in der keine Seitenlänge negativ ausfällt, mindestens zwei nicht verschwinden und die nichtverschwindenden paarweise verschieden sind. Ein Beispiel einer so erhaltenen zulässigen Zerlegung, das meines Wissens bisher nicht bekannt ist, zeigt Abb. 1.

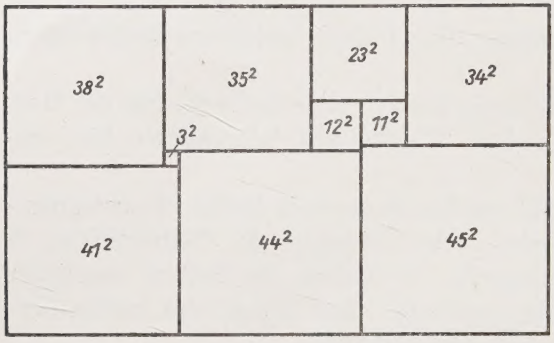

Abb. 1.

Aus den Sätzen von Herrn DEHN folgt, daß die Lösung des homogenen Gleichungensystems höchstens den Rang 1 haben kann. Ein zulässig zerlegtes Rechteck ist durch die Art seiner Zerlegung bereits bis auf Ähnlichkeit völlig bestimmt. Es ist daher eine durchaus nichttriviale Frage, ob ein Rechteck von vorgegebenem Seitenverhältnis, insbesondere ein Quadrat, sich zulässig zerlegen läßt.[4]) Nach Herrn DEHN muß das Seitenverhältnis jedensfalls (positiv und) rational sein. Eine genaue Charakterisierung scheint ein tiefliegendes Problem zu sein. — In Teil II dieser Arbeit soll die Approximation gegebener Seitenverhältnisse durchgeführt werden.

Auf eine Aufzählung sämtlicher Zerlegungen von Rechtecken in Rechtecke beabsichtige ich in einer späteren Arbeit zurückzukommen, die in den Math. Annalen erscheinen wird.

II.

Wie Abb. 1 lehrt, gibt es zulässig zerlegte Rechtecke.

R_0 sei ein solches. Seine Seitenlängen seien a_0 und b_0, $a_0 \leqq b_0$. Wir bemerken, daß für die Seitenlänge c eines Teilquadrats von R_0 stets $c \leqq a_0$ und $c < b_0$ gilt. Man hat nämlich dazu nur zu beachten,

4) Vgl. M. Kraïtchik, *La mathématique des jeux*. Bruxelles 1930, S. 272. Dort wird eine Mitteilung von Herrn Lusin wiedergegeben, in der die Unmöglichkeit der zulässigen Zerlegung eines Quadrats vermutet wird.

daß im Falle $a_0 = b_0$ jedenfalls nicht $c = b_0$ sein kann, da bei einer zulässigen Zerlegung nach Definition mehr als ein Teilquadrat auftreten soll. Auf Grund dieser Bemerkung definieren wir den

Prozeß des „Anlegens“: Man füge an eine der längeren Seiten des Rechtecks R_0 ein Quadrat mit der Seitenlänge b_0 an. Dadurch entsteht ein zulässig zerlegtes Rechteck R_1 mit den Seiten $a_1 = b_0$, $b_1 = a_0 + b_0$.

Den Prozeß kann man iterieren; man erhält so eine unendliche Folge zulässig zerlegter Rechtecke R_0, R_1, R_2, ..., R_n, ... mit den Seiten a_n, b_n, wo $a_n < b_n$ $(n \geqq 1)$ und $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$ ist.

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sei das Verhältnis des goldenen Schnitts (also $\alpha > 1$, $\alpha^2 = \alpha + 1$). Es gelten die Abschätzungen

$$a_n > \alpha^{n-2} b_0,$$

$$b_n > \alpha^{n-1} b_0 \qquad (n \geqq 1); \tag{1}$$

denn für $n = 1$ stimmt das, und aus der Gültigkeit von (1) für n folgt

$$a_{n+1} = b_n > \alpha^{n-1} b_0,$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n > (\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}) b_0 = \alpha^n b_0.$$

Ferner gilt für die Seitenverhältnisse

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \alpha.$$

Wegen der Irrationalität von α und der Rationalität der Größen $\frac{b_n}{a_n}$ sind in der Folge der $\frac{b_n}{a_n}$ immer nur höchstens endlich viele paarweise gleich.

Weiß man, daß ein zulässig zerlegtes Rechteck R mit den Seiten a, b $(a \leqq b)$ durch (mindestens) n-malige Iteration des „Anlegens“ entstanden ist, so lassen sich die Seitenlängen $c_1, c_2, \ldots, c_\nu, \ldots, c_n$ seiner n größten Teilquadrate angeben:

$$c_1 = a,\ c_2 = b - a,\ \ldots,\ c_{\nu+1} = c_{\nu-1} - c_\nu,\ \ldots.$$

Das Bildungsgesetz läßt sich auch in der geschlossenen Form

$$c_\nu = (-1)^\nu (\varphi_{\nu-1} b - \varphi_\nu a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

angeben, wo φ_ν die durch

$$\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 1,\ \varphi_{\nu+1} = \varphi_\nu + \varphi_{\nu-1}$$

definierten Fibonaccischen Zahlen bedeuten. Wir bemerken noch besonders, daß in (2) die Koeffizienten von a nicht verschwinden. Betrachtet man in (2) also b als fest, a als veränderlich, so hängen alle c_ν von a wirklich ab, und zwar stetig. Wir bemerken ferner, daß in Umkehrung von (1) (man muß dort $b_n = b$, $b_0 = c_n$ setzen)

$$c_n < \alpha^{1-n} b$$

gilt. Ist c Seitenlänge eines Teilquadrats von R und fällt dieses c nicht unter die in (2) aufgezählten Seitenlängen, so ist $c < c_n$. Es gilt also

$$c < \alpha^{1-n} b. \tag{3}$$

Wir können nun den folgenden Hauptsatz beweisen:

Satz 1: *Seien $q \geqq 0$ und $\varepsilon > 0$ vorgegebene reelle Zahlen. Dann gibt es ein zulässig zerlegtes Rechteck R mit den Seitenlängen a und b so, daß*

$$\left| \frac{b}{a} - q \right| < \varepsilon \quad \textit{ist.} \tag{4}$$

Vorbemerkung: Für $q = 1$ ist das durch Herrn ABE a. a. O.[3]) bekannt.

Beweis: Es sei wieder $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wir wählen zwei Zahlen $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ und bestimmen zwei natürliche Zahlen r und s so, daß

$$\left| \frac{s}{r} \alpha - q \right| < \varepsilon_1 \text{ und } r > 1 \tag{5}$$

ist. In der oben konstruierten Folge von Rechtecken R_0, R_1, ... lassen wir zunächst alle die (höchstens endlich vielen) R_ν weg, deren Seitenverhältnis $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ nicht der Bedingung

$$\left| \frac{b_\nu}{a_\nu} - \alpha \right| < \varepsilon_2 \tag{6}$$

genügt. Die übrigen R_ν ersetzen wir durch dazu ähnliche, zulässig zerlegte Rechtecke R_ν' mit den Seiten a_ν', b_ν', derart daß alle $b_\nu' = 1$ sind. Wir beginnen nun mit einem beliebigen zulässig zerlegten Rechteck R'_{ν_1} dieser neuen Folge. Wir behaupten, daß es in der Folge ein weiteres zulässig zerlegtes Rechteck R'_{ν_2} mit den Seiten a'_{ν_2} und $b'_{\nu_2} = 1$ so gibt, daß alle Teilquadrate der zulässigen Zerlegungen von R'_{ν_1} und R'_{ν_2} in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind.

Wir bezeichnen die Seitenlängen der bei der zulässigen Zerlegung von R'_{ν_1} auftretenden Teilquadrate mit $m_1, m_2, \ldots, m_t$. m sei das Minimum dieser Zahlen. Wir bestimmen dann eine natürliche Zahl n so, daß

$$\alpha^{1-n} < m \tag{7}$$

gilt. Lassen wir jetzt in unserer Folge der R_ν' noch alle die zulässig zerlegten Rechtecke weg, die nicht durch mindestens n-malige Iteration des „Anlegens" entstanden sind, so schließen wir dadurch wieder höchstens endlich viele aus.

a_ν' sei Seitenlänge eines noch in der Folge verbliebenen, zulässig zerlegten Rechtecks R_ν'. Von diesen a_ν' haben wir immer noch einen unendlichen Wertevorrat zur Verfügung. Die Seiten $c_1, \ldots, c_n$ der n größten Teilquadrate in diesen R_ν' können wir jeweils nach (2)

angeben; aus dieser Formel folgt, daß wir unter unseren verbliebenen a_ν' auf unendlich viele Arten ein solches auswählen können, daß $c_1, \ldots, c_n$ von $m_1, \ldots, m_t$ paarweise verschieden sind. Dieses a_ν' gehöre zu einem zulässig zerlegten Rechteck, das wir nun mit R'_{ν_2} bezeichnen. Es erfüllt die gestellten Bedingungen: Denn ist c' Seite eines Teilquadrats von R'_{ν_2}, so ist entweder $c' = c_\nu$ für ein ν mit $1 \leqq \nu \leqq n$; dann ist nach der soeben angestellten Betrachtung $c' \neq m_\tau$ für alle τ mit $1 \leqq \tau \leqq t$; oder es ist $c' < c_n$. In diesem letzten Fall ist nach (3) (wo für b jetzt 1 zu setzen ist) und (7)

$$c' < \alpha^{1-n} < m \leqq m_\tau$$

für alle $\tau = 1, \ldots, t$; also ist jedenfalls auch hier $c' \neq m_\tau$.

Wir können nun zu R'_{ν_1}, R'_{ν_2} ein weiteres zulässig zerlegtes Rechteck R'_{ν_3} der Folge so angeben, daß alle bei den Zerlegungen von R'_{ν_1}, R'_{ν_2}, R'_{ν_3} auftretenden Teilquadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind. Der Beweis verläuft genau wie oben.

So fortschreitend, gelangen wir zu einer Menge von r zulässig zerlegten Rechtecken $R'_{\nu_1}, R'_{\nu_2}, \ldots, R'_{\nu_r}$, so daß alle in diesen Zerlegungen auftretenden Teilquadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind (r ist dabei die in (5) bestimmte Zahl). Wir fügen nun diese Rechtecke an den Seiten der Länge 1 aneinander, so daß ein zulässig zerlegter rechteckiger Streifen S_1 mit den Seiten

$$a^{(1)} = a'_{\nu_1} + a'_{\nu_2} + \cdots + a'_{\nu_r} \text{ und } 1$$

entsteht. Diesen Streifen S_1 verkleinern wir ähnlich zu einem zulässig zerlegten S_1' derart, daß die Seite $a^{(1)}$ von S_1 in eine Seite der Länge 1 von S_1' übergeht.

Wir wollen nun einen weiteren zulässig zerlegten rechteckigen Streifen S_2' nach denselben Vorschriften konstruieren, aber so, daß außerdem noch die bei den Zerlegungen von S_1' und S_2' auftretenden Teilquadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind.

Zu diesem Zweck setzen wir zunächst wieder aus r Vertretern der R'_ν — sie mögen nun $R''_{\nu_1}, R''_{\nu_2}, \ldots, R''_{\nu_r}$ heißen — einen Streifen S_2 zusammen. Bei der Wahl der $R''_{\nu_1}, \ldots, R''_{\nu_{r-1}}$ brauchen wir nur wieder darauf zu achten, daß die bei ihrer zulässigen Zerlegung auftretenden Quadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind; wir können etwa wieder die schon für S_1 benutzten $R'_{\nu_1}, \ldots, R'_{\nu_{r-1}}$ wählen. Die endgültige Wahl von R''_{ν_r} behalten wir uns noch vor. Wir wissen schon, daß wir R''_{ν_r} jetzt noch auf unendlich viele Arten so wählen können, daß auch die bei der zulässigen Zerlegung der $R''_{\nu_1}, \ldots, R''_{\nu_r}$ auftretenden Teilquadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind. Wir nennen die Menge der R''_{ν_r}, für die dies

erfüllt ist, zur Abkürzung $\mathfrak{R}$ und werden nachher ein passendes R''_{ν_r} aus $\mathfrak{R}$ bestimmen.

Zunächst nehmen wir an, daß wir ein passendes R''_{ν_r} bereits gefunden hätten. Seine Seiten seien a''_{ν_r} und 1. Fügt man die $r-1$ bereits fest gewählten zulässig zerlegten Rechtecke $R''_{\nu_1}, \ldots, R''_{\nu_{r-1}}$ an den Seiten der Länge 1 zu einem Streifen S^* zusammen, so hat dieser die Seitenlängen $a^* = a''_{\nu_1} + \cdots + a''_{\nu_{r-1}}$ und 1. Fügt man noch das Rechteck R''_{ν_r} an, so entsteht der Streifen S_2 mit den Seitenlängen $a^* + a''_{\nu_r}$ und 1. Um hieraus den Streifen S_2' zu gewinnen, müssen wir S_2 im Verhältnis $1 : (a^* + a''_{\nu_r})$ ähnlich verkleinern; S_2' hat dann die Kantenlängen 1 und $\frac{1}{a^* + a''_{\nu_r}}$. Die sämtlichen in der Zerlegung von S^* auftretenden Teilquadrate seien $d_1, \ldots, d_k$. Nennen wir denjenigen Teil von S_2', der bei der Verkleinerung aus S^* hervorgeht, $S^{*\prime}$, so haben die bei der Zerlegung von $S^{*\prime}$ auftretenden Teilquadrate die Seitenlängen

$$\frac{d_1}{a^* + a''_{\nu_r}}, \ldots, \frac{d_k}{a^* + a''_{\nu_r}}. \tag{8}$$

R''_{ν_r} möge durch mindestens n-maliges Anlegen entstanden sein. Dann sind die n größten Teilquadrate von R''_{ν_r} durch (2) gegeben. Beim Verkleinern im Maßstabe $1 : (a^* + a''_{\nu_r})$ erhalten sie die Seitenlängen

$$\frac{(-1)^\mu}{a^* + a''_{\nu_r}} (\varphi_{\mu-1} - \varphi_\mu a''_{\nu_r}) \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Die übrigen Teilquadrate von R''_{ν_r} haben eine kleinere Seitenlänge als α^{1-n}; nach dem Verkleinern im Maßstabe $1 : (a^* + a''_{\nu_r})$ gilt für die Seitenlängen h_ϱ dieser Teilquadrate demnach sicher

$$h_\varrho < \frac{\alpha^{1-n}}{a^* + a''_{\nu_r}} < \frac{\alpha^{1-n}}{a^*}. \tag{10}$$

(Wir beachten $a^* > 0$ wegen $r > 1$.) Seien nun $e_1, \ldots, e_l$ sämtliche in der zulässigen Zerlegung von S_1' auftretenden Teilquadrate und e das Minimum dieser Zahlen. Wir wählen dann ein R''_{ν_r} aus $\mathfrak{R}$ endgültig nach folgenden Vorschriften: n sei so gewählt, daß

$$\frac{\alpha^{1-n}}{a^*} < e \tag{11}$$

wird. R''_{ν_r} sei durch mindestens n mal iteriertes Anlegen entstanden und ferner so gewählt, daß für das zugehörige a''_{ν_r} sämtliche durch (8) und (9) gegebenen Ausdrücke von den $e_1, \ldots, e_l$ paarweise verschieden ausfallen. Das geht, denn (8) und (9) hängen von a''_{ν_r} wirklich ab (bei (9) beachte man $a^* > 0$), und Gleichheit der in (8) und (9) gegebenen Ausdrücke mit einem e_λ kann für höchstens endlich viele Werte von a''_{ν_r} eintreten; wir haben aber noch unendlich viele

a''_{r_r} zur Verfügung. Bilden wir also mit diesem R''_{r_r} den Streifen S_2', so müssen alle bei den zulässigen Zerlegungen von S_1' und S_2' auftretenden Teilquadrate paarweise inkongruent sein. Denn für die bei den Zerlegungen von S_1' allein bzw. von S_2' allein auftretenden Teilquadrate wußten wir dies schon. Daß die in $S^{*\prime}$ auftretenden Teilquadrate sowie die n größten bei der zulässigen Zerlegung des im Maßstabe $1 : (a^* + a''_{r_r})$ verkleinerten R''_{r_r} auftretenden Teilquadrate von den Teilquadraten von S_1' (Seitenlängen $e_1, \ldots, e_l$) paarweise verschieden sind, war oben gefordert. Daß die bisher nicht aufgezählten Teilquadrate von S_2' von denen von S_1' paarweise verschieden sind, folgt daraus, daß sie nach (10) und (11) alle kleinere Seitenlängen haben als $e_1, \ldots, e_l$.

Nach demselben Verfahren können wir nun zu S_1', S_2' einen dritten Streifen S_3' konstruieren, so daß die bei den zulässigen Zerlegungen von S_1', S_2', S_3' auftretenden Teilquadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind. So fortfahrend, gelangen wir zu s Streifen $S_1', S_2', \ldots, S_s'$ (s ist die in (5) bestimmte Zahl), wobei sich jeder dieser Streifen aus r Rechtecken zusammensetzt, deren Seitenverhältnis sich gemäß (6) von α nur wenig unterscheidet. Aus $S_1', S_2', \ldots, S_s'$ setzen wir nun durch Zusammenfügen an den Seiten der Länge 1 ein Rechteck zusammen. Dieses Rechteck erfüllt die Behauptungen von Satz 1, sobald wir nur zu Anfang ε_1 und ε_2 genügend klein gewählt haben. — Abb. 2 skizziert den Aufbau des großen Rechtecks aus den kleinen Rechtecken, deren Seitenverhältnis nahe bei α liegt. —

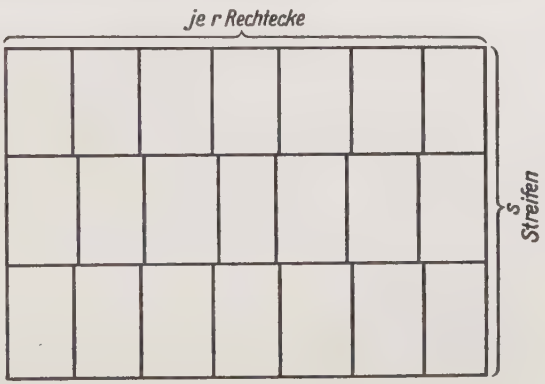

Abb. 2.

Satz 2: *Seien* $q \geqq 0$, $\varepsilon > 0$ *und* $\eta > 0$ *vorgegebene reelle Zahlen. Dann gibt es ein zulässig zerlegtes Rechteck* R *mit den Seitenlängen* a *und* b *so, daß*

$$\left| \frac{b}{a} - q \right| < \varepsilon \tag{4}$$

und

$$\frac{c}{\operatorname{Min}(a, b)} < \eta$$

ist, wo c *die Seitenlänge des größten bei der Zerlegung von* R *auftreten-*

den Teilquadrats ist (d. h. also, in Satz 1 kann man noch fordern, daß die bei der zulässigen Zerlegung von R auftretenden Teilquadrate alle sehr klein sind).

Beweis: Man wähle bei der zum Beweise von Satz 1 benutzten Konstruktion in (5) die Zahlen r und s genügend groß. —

Wir wollen nun Satz 2 dahingehend verschärfen, daß wir zulässig zerlegte Rechtecke angeben, deren Seitenverhältnis neben der Bedingung (4) noch endlich viele entsprechend gebaute p-adische Bedingungen erfüllt.

$\mathfrak{M}$ sei eine Menge von Bewertungen des Körpers P der rationalen Zahlen. Wir bezeichnen die einzelnen Bewertungen mit $|\ |_p$. Dabei kann p eine Primzahl (nichtarchimedische p-adische Bewertung) oder das Symbol $p^{(\infty)}$ sein; im letzten Falle sei $|\ |_{p^{(\infty)}}$ der gewöhnliche absolute Betrag. Wir wollen gleich voraussetzen, daß $\mathfrak{M}$ die Bewertung $|\ |_{p^{(\infty)}}$ tatsächlich enthält; für das folgende bedeutet das höchstens eine Erschwerung.

Es sei zu jeder Bewertung $|\ |_p$ eine Zahl β_p gegeben. β_p gehöre für eine nichtarchimedische Bewertung dem aus P durch p-adisches Abschließen entstehenden Körper P_p an; $\beta_{p^{(\infty)}}$ sei eine nichtnegative reelle Zahl. Es seien ferner reelle Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$ gegeben. Wenn es dann zu jeder Wahl der β_p, ε und η ein zulässig zerlegtes Rechteck R mit den Seiten a und b gibt, bei dem die Seitenlänge des größten Teilquadrats wieder c heißen möge, so daß simultan

$$\frac{c}{\operatorname{Min}(a,b)} < \eta \tag{12}$$

und

$$\left| \frac{b}{a} - \beta_p \right|_p < \varepsilon$$

(letzteres für alle Bewertungen von $\mathfrak{M}$) gilt, so möge für den Augenblick $\mathfrak{M}$ eine *Zerlegungsmenge* heißen.

Satz 3: *Jede endliche Menge $\mathfrak{M}$ von Bewertungen ist Zerlegungsmenge.*

Vorbemerkung: Man könnte diesen Satz wie Satz 1 und Satz 2 beweisen, wenn man wüßte, daß sich aus der zu Anfang dieses Teils II angegebenen Folge zulässig zerlegter Rechtecke $R_0, R_1, R_2, \ldots$ mit den Seiten $a_0, b_0;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2; \ldots$ eine Teilfolge auswählen läßt, so daß die zugehörigen Quotienten $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ hinsichtlich aller zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Bewertungen gegen von 0 verschiedene Grenzwerte streben. Ob dieser Weg für alle $\mathfrak{M}$ gangbar ist, weiß ich nicht; für den Fall, daß $\mathfrak{M}$ nur wenige Bewertungen (etwa drei nichtarchimedische und die Betragsbewertung, oder noch weniger) enthält, kommt man auf

diesem Wege durch. Das Problem hängt wegen des speziellen Baus der Folge $R_0, R_1, R_2, \ldots$ eng mit Eigenschaften der FIBONACCIschen Zahlen zusammen.

Beweis von Satz 3: $\mathfrak{M}$ sei eine endliche Menge von Bewertungen. Der Fall, daß $\mathfrak{M}$ nur aus der Bewertung $|\ |_{p(\infty)}$ allein besteht, ist durch Satz 2 erledigt. Sei also $|\ |_p$ eine zu $\mathfrak{M}$ gehörige nichtarchimedische Bewertung, und für die Menge $\mathfrak{M}'$ von Bewertungen, die aus $\mathfrak{M}$ durch Weglassen der Bewertung $|\ |_p$ entsteht, sei der Satz bereits bewiesen.

Auf Grund dieser Induktionsannahme konstruieren wir eine Folge $\mathfrak{R}$ von zulässig zerlegten Rechtecken $R_1, R_2, \ldots$ mit resp. den Seiten $a_1, b_1;\ a_2, b_2; \ldots$. Die Seitenlängen der in den Zerlegungen auftretenden größten Teilquadrate seien resp. $c_1, c_2, \ldots$. Wir fordern

$$\frac{c_n}{\operatorname{Min}(a_n, b_n)} < \frac{1}{n}$$
$$\left|\frac{b_n}{a_n} - 1\right|_{p'} < \frac{1}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

für alle zu $\mathfrak{M}'$ gehörigen Bewertungen $|\ |_{p'}$. Für die Betragsbewertung sei sogar

$$\left|\frac{b_n}{a_n} - 1 + \frac{1}{2^n}\right|_{p(\infty)} < \frac{1}{2^{n+2}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Also: die Quotienten $\frac{b_n}{a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sind paarweise verschieden, und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$ hinsichtlich aller zu $\mathfrak{M}'$ gehörigen Bewertungen.

Wir betrachten nun ein beliebiges R_n aus $\mathfrak{R}$. Ist $\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p \leqq 1$, so setzen wir $R_n' = R_n$, $a_n' = a_n$, $b_n' = b_n$. Ist dagegen $\left|\frac{b_n}{a_n}\right|_p > 1$, so vertauschen wir die Bezeichnungen, setzen also $a_n' = b_n$, $b_n' = a_n$ und nennen das neue Rechteck auch R_n'. Wir ändern nun die R_n' ähnlich so ab, daß daraus Rechtecke R_n'' mit den Seiten $a_n'' = 1$, $b_n'' = \frac{b_n'}{a_n'}$ entstehen. Es ist nun folgendes erreicht: Die b_n'' sind paarweise verschieden; es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n'' = 1$ hinsichtlich aller zu $\mathfrak{M}'$ gehörigen Bewertungen; es ist $|\ b_n''\ |_p \leqq 1$ (es besteht also p-adische Beschränktheit). Aus dieser letzten Eigenschaft folgt nach einem fundamentalen Satz, daß es eine Teilfolge $\mathfrak{R}^*$ der R_n'' gibt, deren Glieder wir mit R_n^* (Seitenlängen $1, b_n^*$) bezeichnen wollen, so daß die Folge b_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$ hinsichtlich der Bewertung $|\ |_p$ konvergiert; der Limes heiße γ_p. Wir unterscheiden zwei Fälle:

I. $\gamma_p \neq 0$. Um ein zulässig zerlegtes Rechteck R mit den in der Einleitung zu Satz 3 angekündigten Eigenschaften zu konstruieren,

wählen wir wieder zwei genügend kleine positive Zahlen ε_1 und ε_2. Wir wählen ein $N = N(\varepsilon_1)$ so, daß für $n > N$

$$| b_n^* - 1 |_{p'} < \varepsilon_1$$

für alle $| \; |_{p'}$ aus $\mathfrak{M}'$ und

$$| b_n^* - \gamma_p |_p < \varepsilon_1$$

ist. Ferner wählen wir natürliche Zahlen $r > 0$, $s > 0$ so, daß simultan

$$\left| \frac{s}{r} - \beta_{p'} \right|_{p'} < \varepsilon_2$$

für alle $| \; |_{p'}$ aus $\mathfrak{M}'$ und

$$\left| \frac{s}{r} \gamma_p - \beta_p \right|_p < \varepsilon_2$$

ist; eine solche Wahl von r, s ist stets möglich.[5]) Zwecks späterer Erfüllung der Bedingung (12) lassen sich hier r und s noch beliebig groß wählen. Wir setzen nun wie beim Beweis von Satz 1 aus Rechtecken R_n^{**}, die zu den R_n^* mit $n > N$ ähnlich sind, in s Streifen zu je r Stück ein großes Rechteck R mit den Seiten a, b zusammen.

Bei passender Wahl von ε_1, ε_2 gilt $\left| \frac{b}{a} - \beta_{p'} \right|_{p'} < \varepsilon$ für alle $| \; |_{p'}$ aus $\mathfrak{M}$ (einschließlich der Bewertung $| \; |_{p'} = | \; |_p$). Daß die Zerlegung von R zulässig ist, also die auftretenden Teilquadrate paarweise inkongruent sind, läßt sich dadurch erzwingen, daß man bei irgendeiner Numerierung der zum Aufbau von R erforderlichen R_n^{**} fordert, daß das größte in R_{n+1}^{**} auftretende Teilquadrat eine kleinere Seitenlänge hat als alle in $R_1^{**}, \ldots, R_n^{**}$ auftretenden Teilquadrate.

II. $\gamma_p = 0$. Wir dürfen annehmen, daß in den R_n^* für $n \geqq 2$ das größte Teilquadrat eine kleinere Seitenlänge hat als das kleinste Teilquadrat bei der zulässigen Zerlegungen von R_1^*. Wir setzen nun aus R_1^* und R_n^* $(n = 2, 3, \ldots)$ durch Aneinanderfügen an der Seite der Länge 1 zulässig zerlegte Rechtecke $R_n^{*\prime}$ mit den Seiten $1, b_1^* + b_n^*$ zusammen. Hinsichtlich aller Bewertungen von $\mathfrak{M}'$ war $\lim\limits_{n \to \infty} b_n^* = 1$, also ist $\lim\limits_{n \to \infty} (b_1^* + b_n^*) = b_1^* + 1 \neq 0$ wegen $b_1^* \neq -1$. Hinsichtlich der Bewertung $| \; |_p$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} b_n^* = 0$, also $\lim\limits_{n \to \infty} (b_1^* + b_n^*) = b_1^* \neq 0$. Wir haben also wieder unendlich viele zulässig zerlegte Rechtecke, die hinsichtlich jeder Bewertung aus $\mathfrak{M}$ mit ihrem Seitenverhältnis gegen von 0 verschiedene Grenzwerte konvergieren. Aus diesen lassen sich wieder zulässig zerlegte Rechtecke mit den gewünschten Eigenschaften zusammensetzen. Das dabei einzuschlagende Verfahren erfordert gegenüber den in den Beweisen von Satz 1, Satz 2 und

5) Vgl. etwa H. Hasse, *Klassenkörpertheorie* (Ausarbeitung einer Vorlesung 1932, 1932/33), S. 59, Satz 48; die Behauptung ist in unserem Falle aber auch leicht direkt zu sehen.

Satz 3, Fall I benutzten Verfahren keine wesentlich neuen Gedanken; die explizite Durchführung des Beweises darf daher wohl übergangen werden.

Die Aufgabe, p-adische Analoga zu der in Satz 2 zusätzlich geforderten Bedingung zu finden, möge hier nur kurz erwähnt werden.

III.

Ein zulässig zerlegtes Rechteck R mit den Seiten a und b $(a \leqq b)$ heiße *irreduzibel* zerlegt, wenn es kein Teilquadrat der Seitenlänge a enthält. Andernfalls heiße die Zerlegung *reduzibel*. (Ein zulässig zerlegtes Quadrat ist also stets irreduzibel zerlegt.)

Satz 4: *Ein zulässig zerlegtes Rechteck enthält mindestens drei Teilquadrate.*

Vorbemerkung: Die Anzahl „drei" ist selbstverständlich zu klein; man könnte mit etwas längeren Überlegungen etwa auch „fünf" beweisen. Mindestens zwei Teilquadrate sind nach Definition vorhanden.

Beweis: Zwei zu einem Rechteck zusammenfügbare Quadrate wären notwendig kongruent, stellten also keine zulässige Zerlegung dar.

Satz 5: *Ist ein Rechteck mit den Seiten a und b $(a \lneqq b)$ irreduzibel zerlegbar, so ist das Rechteck mit den Seiten a, $b + a$ zulässig (reduzibel) zerlegbar.*

Beweis: Man füge ein Quadrat mit der Seitenlänge a an. (Das ist also eine kleine Abänderung des in Teil II beschriebenen „Anlegens".)

Das Gegenstück dazu lautet:

Satz 6: *Ist ein Rechteck mit den Seiten a und b $(a \leqq b)$ reduzibel zerlegt (also $a < b$), so läßt sich das Rechteck mit den Seiten a, $b - a$ zulässig zerlegen.*

Beweis (Prozeß des „Fortlassens"): Löscht man in der reduziblen Zerlegung das Teilquadrat der Seitenlänge a aus, so bleibt entweder (Fall I) ein in inkongruente Teilquadrate zerlegtes Rechteck mit den Seiten a, $b - a$ übrig, oder (Fall II) es bleiben zwei Rechtecke übrig, die sich zu einem in inkongruente Teilquadrate zerlegten Rechteck mit den Seiten a, $b - a$ zusammenfügen lassen; in jedem Falle ist wegen Satz 4 die Anzahl der übriggebliebenen Teilquadrate mindestens zwei.

Satz 7: *Jedes zulässig zerlegte Rechteck enthält ein irreduzibel zerlegtes Teilrechteck.*

Beweis: Ist das vorgelegte Rechteck R nicht schon selbst irreduzibel zerlegt, so kann man daraus durch Löschen des größten Teilquadrats

(mindestens) ein zerlegtes Rechteck R' gewinnen, das Teilrechteck von R ist (vgl. den Beweis von Satz 6). R' enthält weniger Teilquadrate als R. R' enthält mindestens zwei Teilquadrate, ist also wieder zulässig zerlegt. Das schließt man folgendermaßen: Bestünde R' nur aus einem einzigen Teilquadrat, so wäre dieses dem gelöschten Teilquadrat kongruent; die Zerlegung von R wäre also nicht zulässig gewesen. Ist R' auch reduzibel zerlegt, so läßt sich davon wieder ein zulässig zerlegtes Teilrechteck R'' angeben usw. Der Prozeß führt stets wieder auf zulässig zerlegte Rechtecke; da er wegen der endlichen Anzahl der Teilquadrate nicht unbegrenzt fortsetzbar sein kann, muß er bei einem irreduzibel zerlegten Teilrechteck abbrechen.

Satz 5 bis 7 zeigten Möglichkeiten, aus zulässigen Zerlegungen weitere zu gewinnen. Man kann unter passenden Voraussetzungen noch auf viele andere Weisen zulässig zerlegte Rechtecke und einzelne Quadrate zu zulässig zerlegten Rechtecken zusammensetzen. Aus der Fülle derartiger Sätze heben wir einige solche hervor, die mit der zulässigen Zerlegung eines Quadrats zusammenhängen. (Es sei betont, daß im Gegensatz zu den bisherigen Voraussetzungen die Voraussetzungen der Sätze 8 bis 11 Hypothesen sind, deren Realisierbarkeit nicht festgestellt ist.)

Satz 8: *Wenn ein Quadrat zulässig zerlegbar ist, so ist jedes Rechteck, das überhaupt zulässig zerlegbar ist, auf unendlich viele Arten zulässig zerlegbar.*

Beweis: Indem man das kleinste Teilquadrat des zulässig zerlegten Rechtecks seinerseits zulässig zerlegt, erhält man eine neue zulässige Zerlegung desselben Rechtecks; dieses Verfahren läßt sich iterieren.

Satz 9: *Die Rechtecke R_1 und R_2 seien ähnlich; beide seien zulässig zerlegt. Die Seitenlängen der Teilquadrate von R_1 seien $c_1, \ldots, c_r$, die von R_2 seien $d_1, \ldots, d_s$. Ist dann stets*

$$c_\varrho d_\sigma = c_{\varrho'} d_{\sigma'} \qquad (\varrho, \sigma \neq \varrho', \sigma'), \tag{13}$$

so ist es auch möglich, ein Quadrat zulässig zu zerlegen.

Beweis: Man bilde das zulässig zerlegte Rechteck R_1 affin auf ein Quadrat ab. Die Teilquadrate gehen dabei in Rechtecke über, die zu R_1, also auch zu R_2 ähnlich sind. Setzt man in sie ähnliche Bilder der zulässigen Zerlegung von R_2 ein, so erhält man eine Zerlegung eines Quadrats in Teilquadrate; (13) gibt gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß alle Teilquadrate inkongruent sind.

Satz 10: *Wenn es möglich ist, ein Rechteck mit den Seiten a und b auf zwei Arten irreduzibel zu zerlegen, so daß die bei beiden Zerlegungen auftretenden Teilquadrate in ihrer Gesamtheit paarweise inkongruent sind, so ist es auch möglich, ein Quadrat zulässig zu zerlegen.*

Beweis: I. $a = b$. Dann hat man sogar schon zwei zulässig zerlegte Quadrate.

II. $a \neq b$. Das Quadrat der Seitenlänge $a + b$ läßt sich zerlegen in ein Quadrat der Seitenlänge a, ein Quadrat der Seitenlänge b und zwei Rechtecke mit den Seiten a, b. Diese beiden Rechtecke zerlege man noch auf die beiden verschiedenen Arten in Quadrate; das gibt eine zulässige Zerlegung des Quadrats mit der Seitenlänge $a + b$.

Satz 11: *Wenn es möglich ist, einen Quader mit den Kantenlängen a, b, c $(a \leqq b \leqq c)$ so in inkongruente Würfel (Anzahl endlich und größer als 1) zu zerlegen, daß (') kein Teilwürfel die Kantenlänge a hat, so ist es auch möglich, ein Quadrat zulässig zu zerlegen.*

Vorbemerkung: (') ließe sich durch andere schwache Zusatzvoraussetzungen ersetzen.

Beweis: Je zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Quaders werden durch die anstoßenden Teilwürfel zulässig in Quadrate zerlegt, und zwar gerade so, daß die Voraussetzungen von Satz 10 erfüllt sind.

Satz 11 zeigt, daß es bei dem Versuch einer Übertragung der hier behandelten Zerlegungen auf Zerlegungen n-dimensionaler Quader in n-dimensionale Würfel $(n > 2)$ schwieriger (vielleicht unmöglich) sein dürfte, die Existenz auch nur einer zulässigen Zerlegung zu finden. Das hängt damit zusammen, daß für $n > 2$ das lineare homogene Gleichungensystem, das den in Teil I betrachteten Schließungsbedingungen analog wäre, im allgemeinen einen zu hohen Rang hat und daher keine nichttriviale Lösung zuläßt.[6])

Eine Abschwächung der an die Spitze dieser Arbeit gestellten Forderung, daß alle Teilquadrate paarweise inkongruent sein sollen, ergibt sich, wenn man nur verlangt, daß das kleinste Teilquadrat nur genau einmal in der Zerlegung auftritt. Nach den Sätzen von Herrn Dehn können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Seitenlängen der Teilquadrate ganzzahlig gewählt werden.

Satz 12: *Seien c, c_1, c_2, c_3, c_4 paarweise verschiedene positive ganze Zahlen. c_1, c_2, c_3, c_4 seien paarweise teilerfremd. Dann gibt es eine Zahl $C = C(c, c_1, c_2, c_3, c_4)$ so, daß sich jedes Rechteck mit ganzzahligen Seiten $a > C$ und $b > C$ so in Teilquadrate zerlegen läßt, daß dabei genau ein Teilquadrat der Seitenlänge c und im übrigen nur solche der Seitenlängen c_1, c_2, c_3, c_4 auftreten.*

Vorbemerkung: Wählt man $c < \mathrm{Min}(c_1, c_2, c_3, c_4)$, so tritt also das kleinste Teilquadrat genau einmal auf.

6) Vgl. H. Toepken, a. a. O.[2]).

Beweis: Abb. 3 zeigt die Zerlegung eines Rechtecks mit den Seiten a, b in ein Quadrat der Seitenlänge c und vier Rechtecke I, II, III, IV mit resp. den Seiten x, $y+c$; $a-x$, y; $x+c$, $b-y-c$; $a-x-c$, $b-y$. Die simultanen Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \pmod{c_1}, & y+c &\equiv 0 \pmod{c_1}, \\ a-x &\equiv 0 \pmod{c_2}, & y &\equiv 0 \pmod{c_2}, \\ x+c &\equiv 0 \pmod{c_3}, & b-y-c &\equiv 0 \pmod{c_3}, \\ a-x-c &\equiv 0 \pmod{c_4}, & b-y &\equiv 0 \pmod{c_4} \end{aligned}$$

lassen sich für $a > C$, $b > C$ (man kann etwa $C = c + c_1c_2c_3c_4$ wählen) so auflösen, daß die linken Seiten alle positiv werden. Wählt man in Abb. 3 diese Seitenlängen, so werden im Rechteck I beide Seiten durch c_1 teilbar, im Rechteck II beide Seiten durch c_2 teilbar usw. Man kann also die Rechtecke I, II, III, IV noch in Quadrate resp. der Seitenlängen c_1, c_2, c_3, c_4 zerlegen, was dann die behauptete Zerlegung des Rechtecks mit den Seiten a, b ergibt.

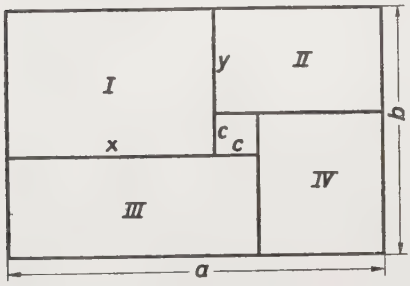

Abb. 3.

Satz 12 erscheint dadurch bemerkenswert, daß er sich (samt Beweis) auf n Dimensionen übertragen läßt.

IV.

Es soll hier gezeigt werden, daß bei der (nicht notwendig zulässigen) Zerlegung eines Rechtecks in Teilquadrate stets mindestens zwei Teilquadrate sich nicht sehr in der Größe unterscheiden. Genauer gefaßt: sei $\mathfrak{M}$ die Menge der Teilquadrate einer Zerlegung (oder auch die Menge der Teilquadrate bei einer der noch zu definierenden unendlichen Zerlegungen oder Überdeckungen oder überhaupt eine Menge von Quadraten). $\mathfrak{M}$ enthalte mehr als ein Quadrat. c und c' seien die Seitenlängen zweier verschiedener (aber vielleicht kongruenter) Quadrate aus $\mathfrak{M}$. Sei $c \leqq c'$. Wir betrachten alle solchen Paare c, c' und setzen

$$q(\mathfrak{M}) = \text{Ob. Grenze } \frac{c}{c'} \tag{14}$$

(also $0 \leqq q(\mathfrak{M}) \leqq 1$). Wir werden für die bei Zerlegungen auftretenden $q(\mathfrak{M})$ positive untere Schranken angeben.

Die abzuleitenden Sätze gelten unter etwas allgemeineren Voraussetzungen. So brauchen wir nicht zu fordern, daß alle Teilquadrate inkongruent sind. Wir brauchen auch nicht zu fordern, daß ihre Anzahl endlich ist; sie soll aber mindestens zwei sein.

Unter einem Flächenstück F wollen wir stets ein solches verstehen, das sich in endlich viele Rechtecke zerlegen läßt, deren Kanten sämtlich nach denselben zwei zueinander senkrechten Richtungen ausgerichtet sind. Alle noch zu betrachtenden Teilquadrate sollen ebenso ausgerichtet sein.

F kann aus mehreren getrennten Stücken bestehen. F besitzt einen Flächeninhalt, den wir ebenfalls mit F bezeichnen.

Wir nennen jetzt allgemeiner F in eine Menge $\mathfrak{M}$ von Teilquadraten *zerlegt*, wenn

a) $\mathfrak{M}$ mehr als ein Quadrat enthält und jedes Quadrat von $\mathfrak{M}$ endliche positive Seitenlänge besitzt,

b) kein Punkt von F innerer Punkt von zwei verschiedenen Quadraten von F ist,

c) F die Menge der Häufungspunkte der Vereinigungsmenge aller Quadrate von $\mathfrak{M}$ ist.

Wir nennen F von einer Menge $\mathfrak{M}$ von Teilquadraten *überdeckt*, wenn a) und b) gelten und ferner

c') die Menge der Häufungspunkte der Vereinigungsmenge aller Quadrate von $\mathfrak{M}$ das Flächenstück F umfaßt.

Wir nennen eine Zerlegung *endlich* oder *unendlich*, je nachdem $\mathfrak{M}$ endlich oder unendlich ist.

Ist F in eine Menge $\mathfrak{M}$ von Quadraten zerlegt, so gibt es in $\mathfrak{M}$ nur endlich viele Quadrate, deren Seitenlänge größer als eine vorgegebene positive Konstante ist, weil andernfalls F keinen endlichen Flächeninhalt hätte. $\mathfrak{M}$ enthält folglich höchstens abzählbar viele Quadrate, und deren Seitenlängen lassen sich folgendermaßen anordnen:

$$c_1 \geqq c_2 \geqq c_3 \geqq \cdots \tag{15}$$

mit $\sum_{\mathfrak{M}} c_n^2$ konvergent und $\leqq F$.

Ist $q = q(\mathfrak{M})$, so ist

$$c_{m+n} \leqq c_m q^n \tag{16}$$

für $n \geqq 0$, falls c_{m+n} und c_m definiert sind und (15) gilt.

Aus den bisherigen Voraussetzungen läßt sich für $q(\mathfrak{M})$ noch keine positive untere Schranke herleiten, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei F vorgegeben. ε bedeute eine feste Zahl mit $0 < \varepsilon < 1$, und $\mathfrak{M}$ sei eine abzählbare Menge von Quadraten mit beschränkter Seitenlänge und $q(\mathfrak{M}) < \varepsilon$. Es sei nicht möglich, F mit einem einzigen Quadrat aus $\mathfrak{M}$ zu überdecken. Wir werden dann F in eine Menge $\mathfrak{M}'$ von Quadraten zerlegen mit $\mathfrak{M}' \leqq \mathfrak{M}$. Da

$$q(\mathfrak{M}') \leqq q(\mathfrak{M}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{M}' \leqq \mathfrak{M} \tag{17}$$

gilt, ist dann $q(\mathfrak{M}') < \varepsilon$.

Um eine solche Zerlegung von F zu konstruieren, seien $P_1, P_2, \ldots$ abzählbar viele Punkte, die in F überall dicht liegen. $c_1, c_2, \ldots$ seien die Seitenlängen der Quadrate aus $\mathfrak{M}$. Die Anordnung läßt sich so wählen, daß $c_1 > c_2 > c_3 > \cdots$ und $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$ gilt. Um den Punkt P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ als Mittelpunkt legen wir das Quadrat mit den vorgeschriebenen Kantenrichtungen und der Seitenlänge c_n. Wir entscheiden nun der Reihe nach für die Indizes $n = 1, 2, \ldots$, ob wir das zugeordnete Quadrat in $\mathfrak{M}'$ aufnehmen wollen, und zwar nehmen wir ein Quadrat dann und nur dann auf, wenn sein Inneres ganz zu F gehört, aber mit dem Innern keines schon vorher aufgenommenen Quadrats einen Punkt gemein hat. Das gibt, wie leicht ersichtlich, eine Zerlegung von F im bisher festgelegten Sinne.

Wir kommen also mit den bisherigen Voraussetzungen nicht aus und fordern zusätzlich von den Zerlegungen:

d) Ist F in eine Menge $\mathfrak{M}$ von Quadraten zerlegt mit den Seiten $c_1 \geqq c_2 \geqq \cdots$, F' ein Teil von F und F' von einer Menge $\mathfrak{M}' \leqq \mathfrak{M}$ von Quadraten überdeckt, so soll

$$F' \leqq \sum_{\mathfrak{M}'} c_n^2$$

sein (rechts und links stehen hier Flächeninhalte).

Sei F ein Rechteck mit den Seiten a und b, $a \leqq b$. Wir nennen die Zerlegung wieder irreduzibel, wenn es kein Teilquadrat der Seitenlänge a gibt; sonst heiße sie reduzibel. Sei jetzt allgemeiner $a \gtreqless b$. Wir setzen $\frac{a}{b} = \varkappa$ (also $\varkappa > 0$). Wir betrachten *alle* Mengen $\mathfrak{M}$ von Teilquadraten, die bei Zerlegungen von F auftreten können, und bilden hierfür

(18) Unt. Grenze $q(\mathfrak{M})$.

Diese Größe hängt ersichtlich nur von $\varkappa$ ab, wir nennen sie $q(\varkappa)$. Entsprechend definieren wir $q_{\text{irr}}(\varkappa)$ und $q_{\text{red}}(\varkappa)$, indem wir in (18) nur solche Mengen $\mathfrak{M}$ zum Vergleich heranziehen, die zu irreduziblen bzw. reduziblen Zerlegungen von F gehören. $q(\varkappa)$ ist also definiert für alle $\varkappa$, für die es überhaupt Zerlegungen des Rechtecks mit den Seiten a, $a\varkappa$ mit mehr als einem Teilquadrat gibt, bei $q_{\text{irr}}(\varkappa)$ und $q_{\text{red}}(\varkappa)$ gilt Entsprechendes.

Alle folgenden Abschätzungen o. ä. dieser Größen enthalten keine Existenzaussagen. Sie werden also nur für solche $\varkappa$ behauptet, für die die abgeschätzten Größen existieren.

Natürlich ist

$$0 \leqq q(\varkappa) \leq 1, \tag{19}$$

$$q\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = q(\varkappa), \quad q_{\text{irr}}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = q_{\text{irr}}(\varkappa), \quad q_{\text{red}}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = q_{\text{red}}(\varkappa), \tag{20}$$

$$q(\varkappa) = \operatorname{Min}\left(q_{\text{irr}}(\varkappa),\ q_{\text{red}}(\varkappa)\right). \tag{21}$$

Satz 13: *Ist F ein Rechteck, das mit einer Menge $\mathfrak{M}$ von Quadraten überdeckt ist, ist F' ein Teilflächenstück von F und g die Seite des größten Quadrats aus $\mathfrak{M}$, das mit F' einen inneren Punkt gemein hat, so ist*

$$q^2(\mathfrak{M}) \geqq 1 - \frac{g^2}{F'}.$$

Beweis: $\mathfrak{M}'$ sei die Menge aller Quadrate aus $\mathfrak{M}$, die mit F' einen inneren Punkt gemein haben, $q' = q(\mathfrak{M}')$. Die Seitenlängen der Quadrate von $\mathfrak{M}'$ seien $g = c_1 \geqq c_2 \geqq c_3 \geqq \ldots$. Im Falle $q' = 1$ ist $q(\mathfrak{M}) = 1$, und man hat nichts zu beweisen. Im Falle $q' < 1$ ergibt sich unter Benutzung von (16) und der Voraussetzung d) (vgl. S. 134)

$$F' \leqq \sum_{\mathfrak{M}'} c_n^2 \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (g q'^n)^2 = g^2 \frac{1}{1 - q'^2},$$

also

$$q^2(\mathfrak{M}) \geqq q'^2 \geqq 1 - \frac{g^2}{F'}.$$

Satz 14: *Es gelten die Ungleichungen*

$$q^2(\varkappa) \geqq 1 - \varkappa, \tag{22}$$

$$q^2(\varkappa) \geqq 1 - \frac{1}{\varkappa}. \tag{23}$$

Beweis: Wegen (20) genügt der Beweis von (22). Da (22) für $\varkappa > 1$ trivial ist, dürfen wir $\varkappa \leqq 1$ annehmen. Wir setzen in Satz 13 für F das Rechteck mit den Seiten a, $a\varkappa$ und $F' = F$. Offenbar läßt sich g durch $g \leqq a\varkappa$ abschätzen. Satz 13 liefert

$$q^2(\mathfrak{M}) \geqq 1 - \frac{g^2}{F'} \geqq 1 - \frac{(a\varkappa)^2}{a^2\varkappa} = 1 - \varkappa,$$

$$q^2(\varkappa) \geqq 1 - \varkappa.$$

Für reduzible Zerlegungen lassen sich die Abschätzungen zum Teil leicht verschärfen. Wegen (20) sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varkappa \geqq 1$, also $\varkappa > 1$ (denn $\varkappa = 1$ kommt bei reduziblen Zerlegungen mit mehr als einem Teilquadrat nicht vor).

Satz 15: *Für $\varkappa \geqq 1$ ist*

$$q_{\text{red}}(\varkappa) \geqq q(\varkappa - 1).$$

Beweis: Durch das in Satz 6 beschriebene „Fortlassen" (das sich offenbar auch auf beliebige unendliche Zerlegungen übertragen läßt) wird aus einer vorgelegten reduziblen Zerlegung eines Rechtecks mit

den Seiten a, $a\varkappa$ in eine Menge $\mathfrak{M}$ von Quadraten eine Zerlegung des Rechtecks mit den Seiten a, $a(\varkappa-1)$ in eine Menge $\mathfrak{M}'$ von Quadraten gewonnen, wo $\mathfrak{M}' \leqq \mathfrak{M}$ ist. Dann folgt aus (17) die Behauptung.

Satz 16: *Für $\varkappa > 1$ ist*

$$q^2_{\mathrm{red}}(\varkappa) \geqq 2 - \varkappa. \tag{24}$$

Beweis: Nach Satz 14 und Satz 15 ist

$$q^2_{\mathrm{red}}(\varkappa) \geqq q^2(\varkappa - 1) \geqq 1 - (\varkappa - 1) = 2 - \varkappa.$$

Satz 17: *Bedeutet*

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180_3$$

das Verhältnis des goldenen Schnitts, so gilt für alle $\varkappa > 0$

$$q_{\mathrm{red}}(\varkappa) \geqq \alpha - 1 = 0.6180_3.$$

Die Schranke wird erreicht, und zwar nur für $\varkappa = \alpha$ und $\varkappa = \frac{1}{\alpha}$.

Beweis: Es genügt wegen (20), $\varkappa > 1$ anzunehmen. Es ist

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0. \tag{25}$$

Für $1 < \varkappa < \alpha$ folgt aus (24)

$$q^2_{\mathrm{red}}(\varkappa) \geqq 2 - \varkappa > 2 - \alpha = (\alpha - 1)^2.$$

Für $\varkappa \geqq \alpha$ folgt aus (21) und (23)

$$q^2_{\mathrm{red}}(\varkappa) \geqq q^2(\varkappa) \geqq 1 - \frac{1}{\varkappa} \overset{*}{\geqq} 1 - \frac{1}{\alpha} = (\alpha - 1)^2.$$

Hierbei wurden auf den rechten Seiten mit Hilfe von (25) leichte Umrechnungen vorgenommen. Das Gleichheitszeichen bei * wird nur für $\varkappa = \alpha$ erreicht.

Daß $q_{\mathrm{red}}(\varkappa) = \alpha - 1$ für $\varkappa = \alpha$ und $\varkappa = \frac{1}{\alpha}$ tatsächlich erreicht wird, zeigt folgendes Beispiel:

Das Rechteck R mit den Seiten a, $a\alpha$ werde zerlegt in ein Quadrat der Seite a und ein Rechteck R' mit den Seiten $a' = a\alpha - a = \frac{a}{\alpha}$, $a'\alpha = a$. R' werde weiter zerlegt in ein Quadrat der Seite $a' = \frac{a}{\alpha}$ und ein Rechteck R″ mit den Seiten $a'' = a'\alpha - a' = \frac{a}{\alpha^2}$, $a''\alpha = a'$. Das wird fortgesetzt. R wird dadurch in die Menge $\mathfrak{M}$ von Quadraten zerlegt, die die Quadrate mit den Seitenlängen a, $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{a}{\alpha^2}$, ... umfaßt. Also ist

$$q(\mathfrak{M}) = \frac{1}{\alpha} = \alpha - 1.$$

Das Beispiel zeigt zugleich, daß sich der DEHNsche Satz von der Rationalität aller Seitenverhältnisse nicht auf unendliche Zerlegungen überträgt.

Wir betrachten nun noch irreduzible Zerlegungen, wobei wir uns wegen (20) wieder auf $\varkappa \geqq 1$ beschränken können. Seien a und $a\varkappa$ die Seiten des irreduzibel zerlegten Rechtecks, $a\gamma$ sei die Seitenlänge des größten Teilquadrats bei einer festen Zerlegung. Es ist also $\varkappa \geqq 1$, $\gamma < 1$.

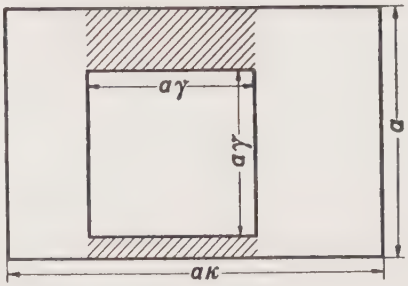

Abb. 4.

Wir wenden Satz 13 an, wobei wir für F' die in Abb. 4 schraffierte Fläche einsetzen, deren Flächeninhalt $F' = a^2(1-\gamma)\gamma$ ist. Das g des Satzes 13 läßt sich durch $g \leqq a(1-\gamma)$ abschätzen. Satz 13 liefert dann

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{g^2}{F'} \geqq 1 - \frac{(a(1-\gamma))^2}{a^2(1-\gamma)\gamma} = 2 - \frac{1}{\gamma}. \tag{26}$$

Wir wenden ferner Satz 13 an, indem wir F' durch das ganze zerlegte Rechteck und g durch $a\gamma$ ersetzen. Dann folgt

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{(a\gamma)^2}{a(a\varkappa)} = 1 - \frac{\gamma^2}{\varkappa}. \tag{27}$$

Sei nun $\gamma_1 = \gamma_1(\varkappa)$ die (es gibt genau eine) reelle Nullstelle von

$$f_1(\gamma_1) = \gamma_1^3 + \varkappa\gamma_1 - \varkappa. \tag{28}$$

Dann ist von selbst $0 < \gamma_1(\varkappa) < 1$. (Es ist nämlich $\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_1} > 0$ für alle reellen γ_1, $f_1(0) = -\varkappa < 0$, $f_1(1) = 1 > 0$.)

Für $0 < \gamma_1(\varkappa) \leqq \gamma < 1$ folgt aus (26)

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 2 - \frac{1}{\gamma} \geqq 2 - \frac{1}{\gamma_1(\varkappa)}.$$

Für $0 < \gamma \leqq \gamma_1(\varkappa) < 1$ folgt aus (27)

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{\gamma^2}{\varkappa} \geqq 1 - \frac{\gamma_1^2(\varkappa)}{\varkappa}.$$

Es ist aber wegen $\gamma_1^3 + \varkappa\gamma_1 - \varkappa = 0$

$$2 - \frac{1}{\gamma_1(\varkappa)} = 1 - \frac{\gamma_1^2(\varkappa)}{\varkappa}.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 18: *Für* $\varkappa \geqq 1$ *ist*

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 2 - \frac{1}{\gamma_1(\varkappa)}, \tag{29}$$

wo $\gamma_1(\varkappa)$ *die reelle Nullstelle von* (28) *ist.*

Ist $\varkappa$ gleich oder nur wenig größer als 1, so läßt sich (29) wie folgt verbessern:

Sei $1 \leqq \varkappa \leqq \alpha$. Wir wenden Satz 13 an, indem wir für F' die Fläche nehmen, die aus dem zerlegten Rechteck durch Weglassen des

größten Teilquadrats entsteht. Der Flächeninhalt ist

$$F' = a(a\varkappa) - (a\gamma)^2 = a^2(\varkappa - \gamma^2).$$

g schätzen wir durch $g \leqq a\varkappa - a\gamma$ ab. Satz 13 ergibt

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{(a\varkappa - a\gamma)^2}{a^2(\varkappa - \gamma^2)} = 1 - \frac{(\varkappa - \gamma)^2}{\varkappa - \gamma^2}. \tag{30}$$

Uns interessiert das Intervall $0 \leqq \gamma \leqq 1$. Die rechte Seite wächst dort in γ monoton, da für $0 < \gamma < 1$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(1 - \frac{(\varkappa - \gamma)^2}{\varkappa - \gamma^2}\right) = \frac{2(\varkappa - \gamma)\varkappa(1 - \gamma)}{(\varkappa - \gamma^2)^2} > 0$$

ist. Für $\gamma = 0$ hat die rechte Seite von (30) einen Wert $\leqq 0$, für $\gamma = 1$ den Wert $2 - \varkappa$. Für $\gamma = 0$ hat die rechte Seite von (27) den Wert 1, für $\gamma = 1$ den Wert $1 - \frac{1}{\varkappa}$, dazwischen fällt sie monoton. Für $1 \leqq \varkappa \leqq \alpha$ ist

$$2 - \varkappa \geqq 2 - \alpha = 1 - \frac{1}{\alpha} \geqq 1 - \frac{1}{\varkappa}.$$

Folglich wird hier für genau ein $\gamma = \gamma_2(\varkappa)$ mit $0 < \gamma_2(\varkappa) \leqq 1$ die rechte Seite von (27) gleich der rechten Seite von (30), d. h. $\gamma_2 = \gamma_2(\varkappa)$ ist für $1 \leqq \varkappa \leqq \alpha$ durch

$$0 < \gamma_2 \leqq 1, \tag{31}$$

$$1 - \frac{(\varkappa - \gamma_2)^2}{\varkappa - \gamma_2^2} = 1 - \frac{\gamma_2^2}{\varkappa}$$

oder nach leichter Umformung

$$f_2(\gamma_2) = \gamma_2^4 - 2\varkappa^2\gamma_2 + \varkappa^3 = 0 \tag{32}$$

eindeutig bestimmt.

Für $0 < \gamma \leqq \gamma_2(\varkappa) \leqq 1$ folgt aus (27)

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{\gamma^2}{\varkappa} \geqq 1 - \frac{\gamma_2^2}{\varkappa}.$$

Für $0 < \gamma_2(\varkappa) \leqq \gamma < 1$ folgt aus (30)

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{(\varkappa - \gamma)^2}{\varkappa - \gamma^2} \geqq 1 - \frac{(\varkappa - \gamma_2)^2}{\varkappa - \gamma_2^2} = 1 - \frac{\gamma_2^2}{\varkappa}.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 19: *Für* $1 \leqq \varkappa \leqq \alpha$ *ist*

$$q^2_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq 1 - \frac{\gamma_2^2(\varkappa)}{\varkappa}, \tag{33}$$

wo $\gamma_2(\varkappa)$ *die durch* (31) *und* (32) *bestimmte Größe ist.*

Die Tabellen im Anhang geben für (23), (24), (29) und (33) einige numerische Werte; Abb. 5 stellt die gleichen Ergebnisse graphisch dar.

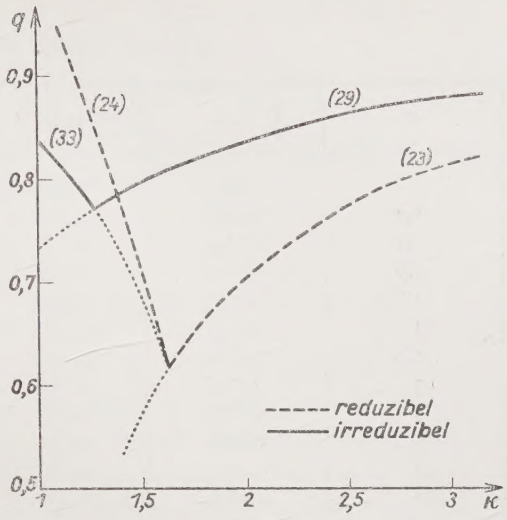

Abb. 5.

Man entnimmt daraus, daß für alle $\varkappa \geqq 1$, also nach (20) für alle $\varkappa > 0$, in Analogie zu Satz 17 eine Abschätzung

$$(34) \qquad q_{\mathrm{irr}}(\varkappa) \geqq q^*$$

gilt, wo q^* ungefähr den Wert 0.77 hat; ob diese Schranke erreicht wird, bleibt hier offen.

Beschränkt man sich auf endliche Zerlegungen, so wird in keiner der obigen Abschätzungen das Gleichheitszeichen erreicht, da bereits im Beweise des grundlegenden Satzes 13 dann an der Stelle

$$\sum_{\mathfrak{M}'} c_n^2 \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (g\, q'^n)^2$$

nicht das Gleichheitszeichen gelten kann. Im Endlichen gilt ferner:

Satz 20: *Für alle* $\varkappa > 0$ *gilt*

$$q(\varkappa) \geqq q^*$$

mit jedem q^*, *das* (34) *für alle endlichen irreduziblen Zerlegungen erfüllt.*

Beweis: Ein Rechteck sei in eine Menge $\mathfrak{M}$ von endlich vielen Teilquadraten zerlegt. Entweder sind unter diesen zwei kongruente, dann ist $q(\mathfrak{M}) = 1$ und damit $q(\mathfrak{M}) \geqq q^*$, oder die Zerlegung ist im früheren Sinn zulässig. Dann enthält aber die Zerlegung nach Satz 7 ein Teilrechteck, das irreduzibel in eine Menge $\mathfrak{M}'$ von Quadraten mit $\mathfrak{M}' \leqq \mathfrak{M}$ zerlegt ist, und $q(\mathfrak{M}) \geqq q^*$ folgt aus (17) und (34).

Numerische Werte

$\varkappa$	$\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa}}$	$\gamma_1(\varkappa)$	$\sqrt{2-\frac{1}{\gamma_1(\varkappa)}}=\sqrt{1-\frac{\gamma_1^2(\varkappa)}{\varkappa}}$
1	(0)	$0{,}682_3$	$0{,}731_0$
1,2	$0{,}408_2$	$0{,}706_3$	$0{,}764_3$
1,4	$0{,}534_5$	$0{,}726_3$	$0{,}789_4$
1,6	$0{,}612_4$	$0{,}743_3$	$0{,}809_1$
1,8	$0{,}666_7$	$0{,}758_0$	$0{,}825_1$
2	$0{,}707_1$	$0{,}770_9$	$0{,}838_4$
2,5	$0{,}774_6$	$0{,}799_9$	$0{,}865_9$
3	$0{,}816_5$	$0{,}817_7$	$0{,}881_5$
4	$0{,}866_0$	$0{,}847_7$	$0{,}905_7$
5	$0{,}894_4$	$0{,}868_8$	$0{,}921_4$
10	$0{,}948_7$	$0{,}921_6$	$0{,}956_5$
100	$0{,}995_0$	$0{,}990_3$	$0{,}995_1$
(∞)	(1)	(1)	(1)

$\varkappa$	$\sqrt{2-\varkappa}$	$\gamma_2(\varkappa)$	$\sqrt{1-\frac{\gamma_2^2(\varkappa)}{\varkappa}}$
1	(1)	$0{,}543_6{}_9$	$0{,}839_3$
1,1	$0{,}948_7$	$0{,}605_5{}_7$	$0{,}816_5$
1,2	$0{,}894_4$	$0{,}669_9{}_5$	$0{,}791_2$
1,3	$0{,}836_7$	$0{,}737_5{}_4$	$0{,}762_5$
1,4	$0{,}774_6$	$0{,}809_6{}_0$	$0{,}729_2$
1,5	$0{,}707_1$	$0{,}888_4{}_8$	$0{,}688_3$
1,6	$0{,}632_5$	$0{,}980_6$	$0{,}631_7$
$\alpha = 1{,}618_0{}_3$	$0{,}618_0{}_3$	1	$0{,}618_0{}_3$

Die eingeklammerten Zahlen sind Grenzwerte, zu denen selbst keine Zerlegung gehört.

Lebenslauf.

Am 4. März 1916 wurde ich, Alfred Max Helmut Stöhr, zu Berlin-Karlshorst als älterer Sohn des Bankrats Alfred Stöhr geboren. In Karlshorst besuchte ich vom 10. Januar 1922 bis Ostern 1923 eine Privatschule, sodann zwei Jahre die dortige 30. Gemeindeschule. Von Ostern 1925 ab besuchte ich das Helmholtz-Realgymnasium in Berlin-Schöneberg. Im März 1933 bestand ich die Reifeprüfung. Seit Mai 1933 studierte ich an der Universität Berlin Mathematik, Physik und Chemie. Im Februar 1938 bestand ich die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen.

Allen meinen akademischen Lehrern, besonders den Referenten dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr. E. Schmidt und Herrn Prof. Dr. W. Weber, möchte ich an dieser Stelle für die mir zuteil gewordene Förderung ergebenst danken.